ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ THU

PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN VÀ CÁC HỆ THỨC HÌNH HỌC TRONG TỨ GIÁC HAI TÂM

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ THU

PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN VÀ CÁC HỆ THỨC HÌNH HỌC TRONG TỨ GIÁC HAI TÂM

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS TẠ DUY PHƯỢNG

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Một số kí hiệu và viết tắt

Trong luận văn này, ta sẽ sử dụng các kí hiệu sau đây:

1) $ABCD$ là tứ giác lồi.

2) A, B, C, D là các đỉnh hoặc các góc của tứ giác $ABCD$; E là giao điểm của AC và BD.

3) $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ là các cạnh hoặc độ dài các cạnh của tứ giác $ABCD$ và $AC = e, BD = f$ là các cạnh hoặc độ dài các cạnh đường chéo của tứ giác $ABCD$.

4) $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ là nửa chu vi của tứ giác $ABCD$.

5) S là diện tích tứ giác $ABCD$.

6) R, r tương ứng là bán kính (hoặc độ dài bán kính) đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tứ giác $ABCD$.

7) R_1, R_2, R_3, R_4 tương ứng là bán kính (hoặc độ dài bán kính) đường tròn ngoại tiếp của tam giác AEB, BEC, CED, DEA.

8) r_1, r_2, r_3, r_4 tương ứng là bán kính (hoặc độ dài bán kính) đường tròn nội tiếp của tam giác AEB, BEC, CED, DEA.

Mở đầu

Dựa trên ý tưởng (xem [8]): Một tam giác hoàn toàn được xác định bởi ba yếu tố độc lập (thí dụ, ba cạnh thỏa mãn bất đẳng thức tam giác, ba đường cao, sin của ba góc,...) nên ba yếu tố đó là nghiệm của một phương trình bậc ba (với các hệ số phụ thuộc vào ba yếu tố cơ bản: nửa chu vi p, bán kính đường tròn ngoại tiếp R và bán kính đường tròn nội tiếp r. Từ đó, sử dụng các tính chất nghiệm của phương trình bậc ba, trong [1] và [2] đã phát biểu và chứng minh khoảng 700 hệ thức (đẳng thức và bất đẳng thức) trong tam giác, trong đó có nhiều hệ thức mới.
Câu hỏi đặt ra là: Ý tưởng trên có thể mở rộng cho tứ giác lồi?-Để xác định một tứ giác lồi bất kì cần năm yếu tố, thí dụ, bốn cạnh và một đường chéo. Vậy chỉ với tứ giác đặc biệt thì bốn cạnh của nó mới là nghiệm của một phương trình bậc bốn. Đó chính là *tứ giác hai tâm*-tứ giác vừa nội tiếp được trong một đường tròn, vừa ngoại tiếp một đường tròn (khác). Điều này đã được chỉ ra trong [6] và [9]. Sau đó, dựa trên tính chất nghiệm của phương trình bậc bốn, trong [3] và [4] đã phát biểu và chứng minh khoảng 100 hệ thức hình học cho tứ giác hai tâm. Điều này cho một cách nhìn hệ thống về các hệ thức trong tứ giác hai tâm.
Ngoài các hệ thức hình học, trong [1] và [2] đã chứng mình vài trăm hệ thức lượng giác trong tam giác. Câu hỏi tự nhiên đặt ra là: Có thể phát biểu và chứng minh các hệ thức lượng giác cho tứ giác hai tâm?-Điều này chưa được thể hiện trong [3] và [4].
Luận văn có mục đích trình bày các hệ thức hình học cho tứ giác hai tâm như là hệ quả từ các tính chất của phương trình bậc bốn, chủ yếu dựa trên [4] và [10], có chỉnh sửa, bổ sung, cấu trúc lại [4] trong tham chiếu với các tài liệu khác. Ngoài ra, trong Luận văn cũng bước đầu phát hiện và chứng minh các hệ thức lượng giác cho tứ giác hai tâm.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, từ bài giảng của các giáo sư, tiến sĩ đang công tác tại Viện Toán học, Trường Đại học khoa học - Đại học Thái Nguyên, tôi đã trau dồi thêm rất nhiều kiến thức để nâng cao trình độ của mình. Từ đáy lòng mình, tôi xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới tất cả các thầy, cô.

Tôi xin chân thành cám ơn Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ quốc tế, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập tại trường.

Dưới sự hướng dẫn của PGS. TS Tạ Duy Phượng, tôi đã phần nào học được phương pháp thu thập và xử lí thông tin, và tập dượt nghiên cứu. Xin được cám ơn Thày hướng dẫn. Đồng thời, tôi cũng xin chân thành cám ơn Thạc sĩ Hoàng Minh Quân, giáo viên Toán trường Trung học Phổ thông Ngọc Tảo, Phúc Thọ, Hà Nội, đã cho phép sử dụng bản thảo [4] và cung cấp một số tài liệu để viết luận văn này.

Nhân dịp này tôi xin chân thành cảm ơn đồng nghiệp, bạn bè và gia đình đã tạo mọi điều kiện giúp đỡ, động viên để tôi hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2019
Tác giả

Phạm Thị Thu

Chương 1

Phương trình bậc bốn và các tính chất nghiệm

1.1 Công thức nghiệm của phương trình bậc bốn

Nói chung, các sách giáo khoa và sách tham khảo môn toán thường không trình bày phương pháp tìm nghiệm của phương trình bậc bốn. Mục này trình bày cách giải phương trình bậc bốn.
Xét phương trình bậc bốn

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \tag{1.1}$$

Phương trình (1.1) có thể viết dưới dạng sau

$$x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d,$$

hay

$$x^4 + ax^3 + \frac{a^2x^2}{4} = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d,$$

tức là

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d \tag{1.2}$$

Cộng hai vế của phương trình (1.2) với $\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)y + \frac{y^2}{4}$, ta được phương trình

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)y + \frac{y^2}{4} = \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)y + \frac{y^2}{4} + \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d,$$

hay

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)x^2+\left(\frac{ay}{2}-c\right)x+\frac{y^2}{4}-d. \qquad (1.3)$$

Ta sẽ chọn y để vế phải của phương trình (1.3) là bình phương của tổng. Để vế phải của phương trình (1.3) là bình phương của tổng thì

$$\Delta=\left(\frac{ay}{2}-c\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)\left(\frac{y^2}{4}-d\right)=0,$$

hay

$$y^3-by^2+(ac-4d)y-[d(a^2-4b)-dy]=0. \qquad (1.4)$$

Vì (1.4) là phương trình bậc ba nên có ít nhất một nghiệm thực (Phương pháp giải và công thức nghiệm của phương trình bậc ba có thể xem trong [2], trang 47-52). Ta chỉ cần chọn một nghiệm thực y_0 nào đó của phương trình (1.4) và thay y_0 vào vế phải của phương trình (1.3). Khi ấy phương trình (1.3) được viết lại như sau

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y_0}{2}\right)^2=(\alpha x+\beta)^2.$$

Điều này tương đương với

$$x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y_0}{2}=\alpha x+\beta,$$

hoặc

$$x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y_0}{2}=-\alpha x-\beta.$$

Giải hai phương trình trên ta tìm được nghiệm của phương trình bậc bốn (1.1)

$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a+\alpha\right)\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}a+\alpha\right)^2-4\beta-2y_0}$$

và

$$x_{3,4}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a-\alpha\right)\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}a-\alpha\right)^2+4\beta-2y_0}\,.$$

1.2 Các tính chất nghiệm của phương trình bậc bốn

Ngoài định lí Viète về tính chất nghiệm của đa thức, mục này trình bày 18 tính chất nghiệm của phương trình bậc bốn, cần thiết cho chứng minh các hệ thức trong chương 3.

Định lí 1.2.1 (Định lí Viète về nghiệm của phương trình bậc bốn) *Phương trình* $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ *có bốn nghiệm* x_1, x_2, x_3, x_4 *thỏa mãn các tính chất sau:*

Tính chất 1.2.1 $T_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a$.

Tính chất 1.2.2 $T_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = b$.

Tính chất 1.2.3 $T_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -c$.

Tính chất 1.2.4 $T_4 = x_1x_2x_3x_4 = d$.

Chứng minh. Vì x_1, x_2, x_3, x_4 là bốn nghiệm của phương trình bậc bốn nên phân tích đa thức ra thừa số ta được đồng nhất thức sau đây đúng với mọi x:

$$\begin{aligned}
&x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \\
=&(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \\
=&\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right]\left[x^2 - (x_3 + x_4)x + x_3x_4\right] \\
=&x^4 - (x_+x_2 + x_3 + x_4)x^3 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)x^2 \\
&- (x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4)x + x_1x_2x_3x_4.
\end{aligned}$$

So sánh các hệ số của đồng nhất thức, ta đi đến các tính chất (1.2.1)-(1.2.4). Từ bốn tính chất trên và sử dụng các tính chất đối xứng của nghiệm, ta suy ra được khá nhiều các hệ thức liên hệ giữa bốn nghiệm của phương trình bậc bốn với các hệ số của phương trình, rất có lợi cho nghiên cứu phương trình bậc bốn và trong chứng minh các hệ thức trong tứ giác.

Tính chất 1.2.5

$$T_5 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = -\frac{c}{d}.$$

Chứng minh.

$$T_5 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4}{x_1x_2x_3x_4} = \frac{T_3}{T_4} = -\frac{c}{d}.$$